

4º
medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo
con el texto escolar

Clase 17

Matemática



Inicio

En esta clase recordaremos cómo **representar conjuntos numéricos por extensión** y por comprensión, además de utilizar **diagramas de Venn** para representar las operaciones entre conjuntos.

Para resolver esta guía necesitarás el texto del estudiante y tu cuaderno de Matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo



Un conjunto es una **colección de elementos** que tienen **una característica en común**. Por ejemplo, Alicia le presenta a Tomás un conjunto (C) de insumos que necesita para hacer pan:

$$C=\{agua,harina,sal,levadura\}$$

Luego, el conjunto C está formado por 4 elementos, en donde la característica es ser los ingredientes que se necesitan para hacer pan (además del fuego, claro está). Cualquier ingrediente que no cumpla con esta característica (condición), no pertenecerá al conjunto C.

Ahora, analicemos conjuntos cuyos elementos son números.

Sea A el conjunto de los números enteros mayores que -2 y menores que 5.

De la **página 19** del texto del estudiante, sabemos que un conjunto numérico puede expresarse de dos formas:

Por extensión: Cuando los elementos del conjunto se escriben explícitamente.

$$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$$

Por comprensión: Cuando se describe una o más características que poseen los elementos que pertenecen al conjunto.

$$A=\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$$



Anota en tu cuaderno el recuadro “tomo nota” de la **página 19** del texto del estudiante y analiza los ejemplos que ahí aparecen.



Unión e intersección de conjuntos

De la **página 19** del texto del estudiante, podemos recordar que se pueden realizar operaciones entre conjuntos numéricos. Estas operaciones son la **unión** (\cup) y la **intersección** (\cap).

¿Cómo se definen estas operaciones?

Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 20\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 25\}$$

Unión: La unión de los conjuntos A y B se define como el conjunto cuyos elementos pertenecen a A, o bien a B. Por tanto, si escribimos los conjuntos por extensión,

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$B = \{1, 5, 25\}$$

La unión entre A y B queda expresada como:

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25\}$$

Intersección: La intersección de A y B se define como el conjunto cuyos elementos pertenecen tanto a A como a B, es decir:

$$A \cap B = \{1, 5\}$$



Diagramas de Venn

Así como los conjuntos se pueden expresar por extensión y comprensión, existe otra manera de representarlos. Los **diagramas de Venn** nos permiten representar, además de conjuntos, las operaciones entre ellos.

De la **página 20** del texto del estudiante, consideremos los conjuntos A y B y utilicemos un diagrama de Venn para representar la unión e intersección entre ellos.

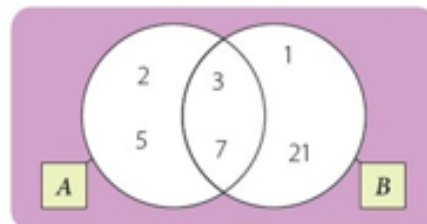
$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número primo de una cifra}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un divisor de } 21\}$$

Si queremos determinar los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$, a simple vista no resultará muy sencillo pues no conocemos los elementos de A ni de B, de modo que podemos escribir ambos conjuntos por extensión y luego representarlos en un diagrama de Venn. Observa.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 7, 21\}$$



Luego, se tiene que $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 21\}$ y $A \cap B = \{3, 7\}$.



Anota en tu cuaderno el recuadro “tomo nota” de la **página 20** del texto del estudiante y luego desarrolla las actividades de la **página 21**.

Cierre



Evaluación de la clase

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1 ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a un conjunto expresado por comprensión?

- a) $O = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- b) $P = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$
- c) $A = \{\text{letras que son vocales}\}$
- d) $B = \{1, 3, 7, 21\}$
- e) $C = A \cup B$

2 Un diagrama de Venn corresponde a:

- a) Un conjunto de elementos que cumplen con ser pares.
- b) Una representación gráfica de conjuntos.
- c) Un conjunto de elementos expresados por comprensión.
- d) Un conjunto de elementos expresados por extensión.
- e) Una intersección de dos conjuntos.

3 Sean $S = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 32\}$ y $Q = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$, ¿cuál de las siguientes alternativas corresponde a la intersección de estos conjuntos?

- a) $S \cap Q = \{1, 2, 4, 8, 16, 20, 24, 32\}$
- b) $S \cup Q = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
- c) $S \cap Q = \{4, 8, 16\}$
- d) $S \cap Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32\}$
- e) $S \cup Q = \{1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 32\}$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _____ fue: _____.

4^o
medio

Texto escolar

Matemática

Unidad

1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Conjuntos

Aprenderé a: representar conjuntos numéricos por extensión y por comprensión.

Repaso

- Menciona algunos de los elementos que forman el conjunto de los números naturales.

Laura le propone a Tomás que describa algunos conjuntos, sin mencionar cada una de las letras. Revisa lo siguiente.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{c, e, i, h, l\}$$

$$C = \{b, c, d, f, g, l, m, n, p, r, s, t, v, w\}$$

- ¿Cómo crees tú que se pueden describir? Explica.

En cursos anteriores aprendiste que un conjunto es una colección de elementos que tienen una característica en común y que se puede definir escribiendo los elementos que lo conforman; por ejemplo, si queremos definir el conjunto A que le presentó Laura a Tomás, podemos escribir:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Otra manera de definir el conjunto anterior consiste en describir la característica común que tienen los elementos del conjunto. En este caso, como todas las letras son vocales, nos queda:

$$A = \{\text{letras que son vocales}\}$$

En el primer caso, el conjunto está definido por **extensión** y en el segundo, por **comprensión**.

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por extensión o por comprensión; por ejemplo, si queremos definir el conjunto D de todos los dígitos nos queda:

Por extensión: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Por comprensión: $D = \{\text{dígitos}\}$

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por comprensión, usando simbología matemática; por ejemplo, para definir el conjunto P de los números positivos pares, podemos escribir:

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$$

Conjunto numérico al que pertenecen todos los elementos de P .

Característica común de todos los elementos de P .

El conjunto anterior se interpreta como "los elementos del conjunto P son todos los números pertenecientes a los números naturales tales que sean pares".

En la tabla de la derecha se muestran algunos símbolos matemáticos que se usan para definir conjuntos por comprensión; por ejemplo, el símbolo \wedge significa "y", y se usa para indicar que se deben cumplir ambas condiciones; por ejemplo, el conjunto $P = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par} \wedge x \text{ es de una cifra}\}$ representa el conjunto de aquellos números enteros que son pares y que además, tienen una cifra, es decir: $P = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Símbolo	Se lee:
/ o bien :	Tal que
\in	Pertenece
\wedge	y
\vee	o
$=$	Igual que
\neq	Distinto que

Al representar conjuntos por comprensión debes fijarte en que todos los elementos que forman el conjunto cumplan las condiciones dadas y que no existan otros elementos que cumplan la condición y que no estén en el conjunto; por ejemplo, no es correcto describir el conjunto $A = \{2, 4, 6, 9\}$ por comprensión de la forma $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$, ya que hay números naturales que cumplen la condición de ser pares pero que no pertenecen a A . Además, un elemento del conjunto A (el 9) no cumple con la condición de ser par.

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 36\}$.

Para escribir el conjunto por extensión, solo escribimos sus elementos separados por una coma. Los elementos de A son todos los números naturales que sean divisores de 36, es decir: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

¿Cómo hacerlo?

Escribe por comprensión el conjunto $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

Si te fijas, los elementos de A corresponden a los múltiplos positivos de 3. Luego: $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de } 3\}$

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión y por comprensión el conjunto H de todos los números positivos que sean divisores de 24, o bien, que sean divisores de 18.

Los divisores de 24 son: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Los divisores de 18 son: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Luego, del enunciado se desprende que los elementos del conjunto H son todos los divisores positivos de 24 o de 18. Si te fijas, puede darse cualquiera de las dos condiciones. Finalmente, definimos el conjunto H :

por extensión: $H = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$;

por comprensión: $H = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 24 \vee x \text{ es divisor de } 18\}$

Utilizamos el símbolo \vee para indicar que debe cumplirse una condición o la otra.

Tomo nota

- Un conjunto se puede definir:
 - por extensión, cuando los elementos del conjunto se escriben explícitamente; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales de dos cifras que comienzan con 3 es: $C = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}$;
 - por comprensión, cuando se describe una o más características comunes de todos los elementos que forman el conjunto; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales que son divisores de 24 y que son pares, se puede describir por comprensión como: $P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 24 \wedge x \text{ es par}\}$.

En cursos anteriores conociste algunas operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos, como la unión o la intersección de ellos; por ejemplo, dados los conjuntos $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$, la unión de P y Q es el conjunto con todos los elementos que pertenecen a P , o bien a Q , es decir:

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13\}$$

Por otra parte, la intersección de P y Q es el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen tanto a P como a Q , es decir:

$$P \cap Q = \{2, 3, 5\}$$

Para realizar operaciones con conjuntos definidos por comprensión, una estrategia consiste en escribirlos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. Por ejemplo, dados los conjuntos:

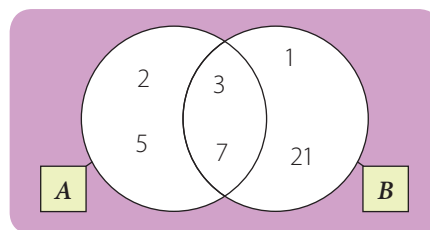
$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número primo de una cifra}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un divisor de } 21\}$$

Si queremos determinar los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$, a simple vista no resultará muy sencillo pues no conocemos los elementos de A ni de B , de modo que podemos escribir ambos conjuntos por extensión y luego representarlos en un diagrama de Venn. Observa.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

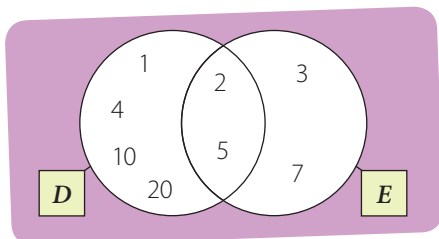
$$B = \{1, 3, 7, 21\}$$



Luego, se tiene que $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 21\}$ y $A \cap B = \{3, 7\}$.

¿Cómo hacerlo?

Sean D y E dos conjuntos. Si $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 20\}$, $D \cap E = \{2, 5\}$ y $D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20\}$, define el conjunto E por extensión y por comprensión.



Primero, necesitamos reconocer el conjunto D por extensión. Luego, nos queda: $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Luego, podemos representar la situación anterior usando un diagrama de Venn, como el de la izquierda.

Por lo tanto, $E = \{2, 3, 5, 7\}$. Para definir el conjunto E por comprensión, considera que todos los elementos de E son números primos de una cifra. Luego, podemos escribir: $E = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo } \wedge x \text{ tiene una cifra}\}$.

Tomo nota

- Para realizar operaciones con conjuntos que están definidos por comprensión, en muchos casos es conveniente escribir estos conjuntos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. También es conveniente representar, en ocasiones, los conjuntos mediante diagramas de Venn.

Invitado especial



Archivo editorial

John Venn (1834-1923)
Fue un matemático y lógico británico que desarrolló los diagramas que llevan su nombre, para representar las operaciones entre conjuntos.

Actividades

1. Escribe por extensión los siguientes conjuntos.

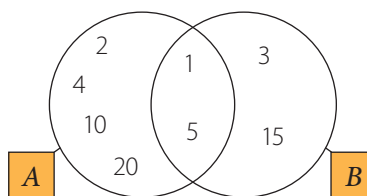
- a. $S = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 32\}$
- b. $T = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de } 5\}$
- c. $U = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ tiene 2 cifras } \wedge x \text{ termina en } 4\}$
- d. $V = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es divisor de } 8 \vee x \text{ es divisor de } 12\}$
- e. $W = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es primo } \wedge x \text{ es par}\}$

2. Escribe por comprensión los siguientes conjuntos.

- a. $O = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- b. $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- c. $Q = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$
- d. $R = \{1, 10, 100, 1\,000, 10\,000, 100\,000, \dots\}$
- e. $S = \{1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$
- f. $T = \{4, 6, 8, 9\}$

3. Observa el diagrama de Venn y define, por extensión y por comprensión:

- a. el conjunto A .
- b. el conjunto B .
- c. el conjunto $A \cup B$.
- d. el conjunto $A \cap B$.



4. A partir de los conjuntos dados, realiza las siguientes operaciones.

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 20\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es impar } \wedge x \text{ tiene una cifra}\}$$

$$C = \{-6, -3, -1, 1, 3, 6, 9\}$$

- a. $A \cup B$
 - b. $B \cap C$
 - c. $C \cup A$
 - d. $(A \cap B) \cup C$
 - e. $(C \cup B) \cup A$
 - f. $(B \cap A) \cup (C \cup B)$
5. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 48\}$, determina, en cada caso, un conjunto B tal que se cumplan las condiciones indicadas.
- a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 48\}$
 - b. $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
 - c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 24, 40, 48\}$
 - d. $A \cap B = \emptyset$

Desafío

Define por comprensión el conjunto:
 $D = \{2, 10, 12, 16, 17, 18, 19\}$.

Antes de continuar

1. ¿Cuándo un conjunto está definido por extensión?, ¿cuándo lo está por comprensión? Da un ejemplo para cada caso.
2. ¿Cómo escribirías por extensión el conjunto de todos los números enteros de una cifra?, ¿cómo lo escribirías por comprensión?